Exercice 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$

1. *On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \to f(k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite (f_n) est-elle croissante ?* pas croissante
3. *Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*

$$\left|\frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)}\right| \leq M = 28$$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (1)$$

$$\left|\frac{n^2-27n+k}{k+n^2}\right| = \left|\frac{-27n+k+n^2}{k+n^2}\right| = \left|\frac{-27n}{k+n^2}+1\right| \leq$$

$\triangle$-inégalité $\rightarrow \leq 27 \cdot \frac{n}{k+n^2} + 1$

$$\leq 27 \cdot 1 + 1 = \underline{28}$$

Plus _________ le denominateur
plus grand la fraction.

Exercice 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$

1. *On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \to f(k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite (f_n) est-elle croissante ?*
3. *Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*

$$\left|\frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)}\right| \leq M$$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (1)$$

$f(k) = \frac{1}{k^2}$

$\mu_C(\{1,3,4\}) = 3$

$\mu_C(\{k\}) = 1 \quad \mu_C(\{1,100\}) = 2$

$0 \notin \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) \cdot \mu_C(\{k\}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_n(k)\, d\mu_C(k) \overset{\downarrow}{=} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \lim_{n\to\infty} f_n(k)\, d\mu_C(k) = \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{1}{k^2}\, d\mu_C(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} f_n(k)\, d\mu_C(k) = \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \overbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\frac{n^2-27n+k}{n^2+k}}_{\cdot f_n(k)} \mathbb{1}_{\{k\}}}^{S_N}\, d\mu_C(k)$$

$(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante

convergence de Beppo-Levi

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}_{\geq 1}} \sum_{k=1}^{N} \frac{n^2-27n+k}{n^2+k} \cdot \mathbb{1}_{\{k\}}\, d\mu_C(k)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{n^2-27n+k}{n^2+k} \underbrace{\mu_C(\{k\})}_{=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2-27n+k}{n^2+k}$$

l'intégral d'une fonction étagée

Exercice 3

1. *Montrer que la fonction $h : [0,1] \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ est une fonction intégrable.*
2. *On définit pour la fonction $I(x) = \int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy$.*
   a) *à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(x) = 2x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(2xy)\,dy$.*
   b) *à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en déduire que $I(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$.*
3. *En déduire $\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy\right) dx$.*
4. *Déduire du théorème de Fubini la valeur de $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 h(x,y)\,dx\right) dy$.*
5. *Que vaut $\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{(\sin y)^2}{y}\,dy$?*

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ et $(F,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème (*Théorème de Fubini-Tonelli*)

Pour toute fonction mesurable **positive** f sur $E \times F$,

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E\left(\int_F f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_F\left(\int_E f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y). \qquad (*)$$

Théorème (*Théorème de Fubini-Lebesgue*)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \to \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E\times F} |f(x,y)|\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty,$$

la suite d'égalités $(*)$ reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E\left(\int_F |f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F\left(\int_E |f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty.$$

Zoom

À montrer : $\iint \underbrace{|h(x,y)|}_{\geq 0}\,d\lambda^2(x,y) < \infty$

$$\iint |h(x,y)|\,d\lambda^2(x,y) = \int\int e^{-y}\underbrace{|\sin(2xy)|}_{\leq 1}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^\infty e^{-y}\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[-e^{-y}\right]_0^\infty dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{-\lim_{y\to\infty} e^{-y}}_{=0} - (-1)\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1 < \infty$$

$$\int_0^\infty e^{-y}\,dy = \int_{[0,\infty)} e^{-y}\,d\lambda(y)$$

$$[F(y)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Riemann-intégrale (par exemple continue)

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda(x)$$

$$\int_{[0,\infty)} e^{-y}\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} \underbrace{e^{-y}\cdot \mathbb{1}_{[0,n]}(y)}_{\geq 0}\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]} e^{-y}\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-y}\,dy = \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^n$$

Beppo Levi

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{-e^{-n}}_{0} - (-1) = 1$$

On peut utiliser Skype maintenant

EXERCICE 3

1. *Montrer que la fonction* $h : [0,1]\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $h(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ *est une fonction intégrable.*
2. *On définit pour la fonction* $I(x) = \int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy$.
   a) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(x) = 2x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(2xy)\,dy$.
   b) à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en déduire que $I(x) = \frac{2x}{1+4x^2}$.
3. *En déduire* $\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} h(x,y)\,dy\right) dx.$ $= \left[\ln(1+4x^2)\right]_0^1 = \ln(5) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \ln(5)$
4. *Déduire du théorème de Fubini la valeur de* $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 h(x,y)\,dx\right) dy.$ $= \ln(5)$
5. *Que vaut* $\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{(\sin y)^2}{y}\,dy$? $= \int_0^\infty J\, dy = \ln(5)$ Fubini-Lebesgue

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ et $(F,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème (*Théorème de Fubini-Tonelli*)
Pour toute fonction mesurable **positive** f sur $E\times F$,

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E\left(\int_F f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_F\left(\int_E f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y). \qquad (*)$$

Théorème (*Théorème de Fubini-Lebesgue*)
Pour toute fonction mesurable $f : E\times F\to\mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E\times F}|f(x,y)|\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty,$$

la suite d'égalités $(*)$ *reste vraie.*

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E\left(\int_F|f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F\left(\int_E|f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty.$$

3.) $\int_0^1 I(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{8x}{1+4x^2}$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(u(x))$$

$$J := \int_0^1 h(x,y)\,dx = \int_0^1 e^{-y}\cdot\sin(2xy)\,dx = e^{-y}\cdot\left[-\frac{\cos(2xy)}{2y}\right]_0^1 =$$

$$= e^{-y}\left(-\frac{\cos(2y)}{2y} - (-1)\right)$$

$$= e^{-y}\cdot\left(\frac{1}{2y} - \frac{\cos(2y)}{2y}\right) =$$

$$= \frac{e^{-y}}{2y}\left(1 - \underbrace{\cos(2y)}_{=2\cos^2(y)-1}\right) =$$

$$= \frac{e^{-y}}{\cancel{2}y}\cdot\cancel{2}\cdot\underbrace{(1-\cos^2(y))}_{\sin^2(y)}$$

$$= e^{-y}\cdot\frac{\sin^2(y)}{y}$$

Eule

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos(\varphi) \qquad \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi$$

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1}$$

Démonstration :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i(\theta+\theta)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\theta} \cdot e^{i\theta}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)\right) \cdot \left(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\underline{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} + 2i \cdot \underline{\cos\theta \sin\theta}\right)$$

$$= \cos^2(\theta) - \underbrace{\sin^2(\theta)}_{= 1 - \cos^2(\theta)}$$

$$= 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$$

$$\phi : U \to \phi(U)$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

es et Utilisation du jacobien.

ection Φ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs
absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien
explicite du changement de variable dans le cas particulier n

Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a, b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\phi : U \to \phi(U)$$

$$= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$= 2\cdot\cos^2(\theta) - 1$$

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'application $f * g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\lambda_n(y).$$

1. *Pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,d\lambda_n(x) < +\infty$ et en déduire que $f*g(x)$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Ψ est un difféomorphisme. Appliquer la formule de changement de variable pour montrer que $f * g = g * f$.*

Cas des intégrales multiples [modifier | modifier le code]

Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.

Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace φ par une injection Φ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne J_Φ. On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n = 2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_U f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv.$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

Théorème [modifier | modifier le code]

Énoncé [modifier | modifier le code]

Soient :

- I un intervalle réel ;
- $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable, de dérivée intégrable ;
- $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que φ soit injective sur $[a,b]$ (voir infra).

Par définition, poser

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in [a,b],$$

s'appelle faire un changement de variable.

$$\int_0^2 e^{x^3}\cdot 3x^2\,dx = \int_0^{8 = 2^3} e^x\,dx =$$

$$x \xrightarrow{-y} \phi(x), \quad \phi(x) \xrightarrow{+y} x$$

$$\Phi(x) = x - \overset{\overset{\in\mathbb{R}^n}{\downarrow}}{y} \in C^1$$

$$\Phi^{-1}(x) = x + y \in C^1$$

$$\to \phi \text{ difféomorphisme}$$

$$\phi(\overset{\overset{\in\mathbb{R}^n}{\downarrow}}{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 = \phi_1(x) \\ \vdots \\ x_n - y_n = \phi_n \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\phi(x)) \cdot \underbrace{|\det J\phi|}_{=1}\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x)$$

$$\mathbb{R}^n = \phi(\mathbb{R}^n) = \{x + y \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

$$|\det J\phi| = |\det E_n| = 1$$

$\partial x_1 \qquad \partial x_n$

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'application $f * g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\lambda_n(y).$$

1. *Pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\,d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f*g(x)$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Ψ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que $f*g = g*f$.*

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ et $(F,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème (***Théorème de Fubini-Tonelli***)

Pour toute fonction mesurable ***positive*** *f sur $E \times F$,*

$$\int_{E\times F} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_E\left(\int_F f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_F\left(\int_E f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y). \qquad (*)$$

Théorème (***Théorème de Fubini-Lebesgue***)

Pour toute fonction mesurable $f : E\times F \to \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E\times F} |f(x,y)|\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty,$$

la suite d'égalités $(*)$ reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E\left(\int_F |f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F\left(\int_E |f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty.$$

Zoom

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)\,g(x-y)}_{\geq 0}\,d\lambda_n(y)\,d\lambda_n(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,d\lambda_n(x)\right) d\lambda_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x)\right)}_{=:C<\infty} d\lambda_n(y) =$$

$$= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda_n(x)\right)}_{<\infty} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,d\lambda_n(y)\right)}_{<\infty} < \infty$$

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ sont intégrables

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Théorème} \\ f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} \\ \text{mésurable} \\ \int f\,d\mu < \infty \iff f < \infty \ \mu \text{ presque partout}\end{array}}$$

$A = (f*g = +\infty)$

$$\infty > \int \underbrace{f*g}_{\geq 0}\,d\lambda^n = \overbrace{\int_A f*g\,d\lambda^n}^{\overbrace{\underbrace{\lambda^n(A)}_{=0}\cdot +\infty}^{=+\infty}}_{<\infty} + \underbrace{\int_{A^c} f*g\,d\lambda^n}_{<\infty}$$

$\Rightarrow \lambda^n(A) = 0$

$\Rightarrow f*g < \infty$ presque partout

$\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad z = x - y$

$\Rightarrow f * g < \infty$ presque partout

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'application $f * g$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, d\lambda_n(y).$$

1. *Pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(x) = x - y$. Montrer que Φ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour $U = \mathbb{R}^n$ pour justifier que*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, d\lambda_n(x).$$
2. *Appliquer le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \, d\lambda_n(x) < +\infty$ puis en déduire que $f * g(x)$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Psi(y) = x - y$. Montrer que Ψ est un difféomorphisme. Appliquer la formule du changement de variable pour justifier que $f * g = g * f$.*

$$z = \Psi(y) = x - y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(y) = x - y \checkmark$$

$$z = x - y \Rightarrow y = x - z \Rightarrow \Psi^{-1}(y) = x - y$$

$$\Psi^{-1}(\Psi(y)) = \Psi^{-1}(x-y) = x - (x-y) = y \checkmark$$

$$|\det J\Psi| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} & \cdots \\ & \ddots \\ & & \frac{\partial \Psi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \right| = |(-1)^n| = 1$$

$$\boxed{\Psi^{-1} = \Psi}$$

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot f(x-y) \, d\delta_n(y)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \, f(\Psi(y)) \, d\delta_n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi^{-1}(\Psi(y))) \, f(\Psi(y)) \cdot \underset{|\det J\Psi|}{1} \, d\delta_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi^{-1}(y)) \cdot f(y) \, d\delta_n = \int_{\mathbb{R}^n} g(\Psi(y)) \cdot f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \cdot f(y) \, dy =$$

$$\Psi(\mathbb{R}^n) = \{x - y\}_{y \in \mathbb{R}^n}$$

$$f(y) = g(\Psi^{-1}(y)) \circ f(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x-y) \, d\delta_n(y) = (f * g)(x)$$

Cas des intégrales multiples [modifier | modifier le code]

Articles détaillés : Changement de variables dans les intégrales multiples et Utilisation du jacobien.

Lorsque f est une fonction de plusieurs variables, on remplace φ par une injection Φ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Outre le changement du domaine d'intégration, on utilise la valeur absolue du jacobien de Φ « à la place » de $|\varphi'|$. Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne J_Φ. On donne ici la formulation explicite du changement de variable dans le cas particulier $n = 2$:

$$\iint_{\Phi(U)} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_U f(\Phi(u,v)) \, |\det J_\Phi(u,v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Pour plus de précision, se reporter aux deux articles détaillés.

$$\int (\Psi(x))^5 \circ \sin(\Psi(x)) \cdot |\det J\Psi| = \int x^5 \cdot \sin(x) \, dx$$

$$\int h(\Psi(x)^{10}) \circ \cos(\Psi(x) + 1) \circ |\det J\Psi| \, dx = \int h(x^{10}) \circ \cos(x+1) \, dx$$

$$f(x) = h(x^{10}) \circ \cos(x+1)$$

$$f(\Psi(x)) = h(\Psi(x)^{10}) \cdot \cos(\Psi(x) + 1)$$

$$\int ((h(\Psi(x)))^{10} + \sin(\Psi(x))) \cdot \det \Psi$$

$$f(x) = h(x)^{10} + \sin(x)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

f continue en x_0 $:\Leftrightarrow$

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \to x_0$:

$f(x_n) \to f(x_0)$

$u \in \mathbb{R}$

$\forall$

$u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$.

[illegible]

$f_u : \Omega \to \mathbb{C}$

$\omega \mapsto e^{iuX(\omega)}$

À montrer : $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$x \mapsto e^{iux}$

$u \in \mathbb{R}$, Pourquoi $f_u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

$$\int |f_u| \, d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{iux}| \, d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \, d\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}^n) = \underline{\underline{1}} < \infty$$

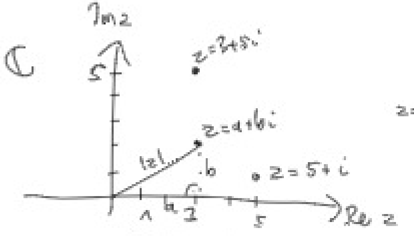
$$\lim_{n\to\infty} \phi_X(u_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu_n x} \, d\mathbb{P}_X(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} e^{iu_n x} \, d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lim_{n\to\infty} iu_n x} \, d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iux} \, d\mathbb{P}_X(x)$$

convergence dominée

e^x est continue

$z = a + i \cdot b \in \mathbb{C}$

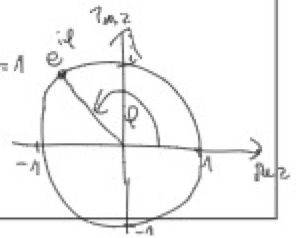


$z = 3+5i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ Euler!

$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1} = 1$



Théorème (*Théorème de continuité sous l'intégrale*)

Soit $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction de $I \times E$ dans $\mathbb{C}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose que :

— **(mesurabilité)** pour tout $t \in I$, $x \to f(t,x)$ est mesurable ;

— **(continuité)** pour μ-presque tout $x \in E$, $t \to f(t,x)$ est continue sur I ;

— **(domination)** il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int \varphi \, d\mu < \infty$ et

$$\text{pour tout } t \in I, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \qquad |f(t,x)| \le \varphi(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \to F(t) = \int f(t,x) \, d\mu(x)$$

est bien définie pour tout $t \in I$, et est continue sur I.